

一种双向缩放 Image Warping 算法

汤 杨 吴慧中

(南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094)

摘 要 根据映射方向的不同,传统 Image Warping 算法可分为正向和逆向方法。针对正向方法存在的映射出界和扩展空洞问题,以及逆向方法存在的效率瓶颈,设计了一种双向缩放 Image Warping 算法。新算法将传统的单向映射分解为一个逆向的视景收缩和正向的模板映射过程,仅通过调整目的图像绘制顺序和映射方向来进行改进,而避免了其他优化算法中相应的预处理步骤以及对场景本身的限制。理论和相关实验证实了双向缩放 Image Warping 算法的合理性和有效性。

关键词 图像映射 双向 收缩

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)09-1908-07

Bidirectional Zooming Image Warping

TANG Yang, WU Hui-zhong

(School of Computer Science & Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract Image Warping includes the forward and backward methods respectively according to the mapping directions. However, out-mapping and holes often exist in the forward approaches, while backward ones cost much computing resources. A novel bidirectional zooming image warping method is proposed in this paper. Instead of the traditional unidirectional mapping, a backward mapping and subsequently a forward mapping are performed to achieve the warping. The new method gives a good solution to current problems by only adjusting the direction of mapping and the order of drawing, without any extra preprocessing and limitation of scene. The promising results can be obtained from both theoretical and experimental studies.

Keywords Image Warping, bidirectional, zooming

1 引 言

一直以来,在传统图形学领域,场景复杂度和显示实时性之间存在显著矛盾。基于图像的绘制技术 IBR (image-based rendering) 由于具有与场景复杂度无关和高度真实感等特点,已成为融合图像和图形领域新的研究热点。图像映射 (Image Warping)^[1-3] 是众多基于 (IBR) 漫游系统^[4-6] 采用的基础算法,它将场景保存为带有深度的参考图像,通过重投影完成从参考视点 to 目的视点的变换,在无需重建场景

的情况下获得新视图。对基础算法的不断改进是提高漫游系统性能的重要因素之一。

传统的映射算法建立在参考域和目的域之间,依据方向不同可以分为正向^[1,7] 和逆向^[8-10] 方法。前者从参考域出发,依据空间几何关系直接计算出对应目的像素位置,速度快,复杂度为 $O(n^2)$ 。但当视点相距较远时易存在大量冗余映射,且容易引起空洞问题。逆向方法从目的域出发,有效地解决了正向映射中的诸多问题,但因为目的像素的深度信息未知,必须依赖于繁琐的参考域搜索匹配过程,复杂度为 $O(n^3)$,从而限制了计算速度,使得难以

基金项目: CAST 基金重点项目 (cast2007041); 国家自然科学基金项目 (60773172)

收稿日期: 2008-03-20; 改回日期: 2008-06-25

第一作者简介: 汤 杨 (1980 ~), 男, 浙江大学计算机应用专业博士研究生。主要研究方向为虚拟现实, 计算机图像图形技术。

E-mail: tang. yang@163. com

应用。

针对这些问题,研究者们从不同的角度进行研究和改进。根据映射原理,McMillan 提出了一种无需深度信息进行可见性判断的 List-Priority 算法^[11],从而避免了 Z-Buffer 的使用。Oliveira 将正向 Image Warping 分解为一个预映射和一个纹理映射过程^[12],由于预映射具有更简单的空间变换关系,而纹理映射可以借助硬件完成,因此,分解后的正向过程可以获得更高的效率。文献[13]也采用类似原理,设计了一种利用硬件分层映射的方法来处理空洞问题。其他改进还体现在存储空间^[14],多视点^[3]等方面。

为了改进逆向 Image Warping 的计算效率,McMillan 从映射方程出发利用极值状态对极线进行裁剪^[2],Marcato 加上景深范围的约束^[8],通过已知的场景远近裁剪平面裁剪极线,从而减少待搜索的像素数,但复杂度仍为 $O(n^3)$ 。层次深度算法^[8]通过建立一种深度二叉树结构,将参考域中单分辨率的极线搜索转化为多尺度的搜索,从而将映射时的复杂度从 $O(n^3)$ 降到 $O(n^2 \log n)$ 。从场景的空间连贯性出发,文献[15]利用已匹配和待匹配像素的相对关系,进一步将复杂度降低到 $O(n^2 R)$ 。改进还从场景特征^[16]和几何特性^[17]方面进行了改进。

本文在前人研究的基础上,利用场景的极线几何特性,尝试设计更加合理、高效的 Image Warping 算法。针对存在的问题,在映射过程中首先采用视景收缩算法获取场景的映射轮廓;然后在相应区域内根据采样密度的变化比例,进行模板映射;若还存在空洞,再从其他参考域获取信息进行填补。其中视景收缩算法缩小了参考域的有效范围,避免了大量无效映射的建立,而模板映射过程采用 footprint 原理^[18]进行融合绘制。由于视景收缩是逆向映射过程,而模板映射为正向映射,因此,将该方法称为双向缩放 Image Warping。

和已有方法相比,新算法的特点在于,既没有将相关计算转移到预处理阶段(层次化深度预处理^[8],像素链表预处理^[16],位移预测^[9],边界提取^[10]),也没有对 3 维场景本身加以过多约束(如直线特性或平面特性要求^[16,19]),它仅通过调整目的图像绘制顺序和映射方向来避免冗余计算。经实验验证,新方法能够有效处理映射出界,空洞等问题,提高计算效率。

2 Image Warping 相关模型和性质

2.1 Image Warping 原理

采用带有深度信息的采样图像来生成新视点下的图像的过程称为 Image Warping,其基本原理是图像的重投影技术,关键在于建立参考像素和目的像素之间的映射关系。

如图 1 所示,空间点 \hat{X} 投影于参考视点 \hat{C}_r 和目的视点 \hat{C}_d ,分别得到参考像素 \hat{X}_r 和目的像素 \hat{X}_d 。正向映射过程从参考域向目的域进行,根据已知信息,建立映射关系为

$$\hat{X}_d = \delta(\hat{X}_r) \mathbf{P}_d^{-1} (\hat{C}_d - \hat{C}_r) + \mathbf{P}_d^{-1} \mathbf{P}_r \hat{X}_r \quad (1)$$

式中, \mathbf{P}_r 和 \mathbf{P}_d 分别为参考和目的域的相机矩阵, $\delta(\hat{X}_r)$ 称为普遍视差^[2]。

反之,逆向映射建立从目的域到参考域的映射关系,为每个目的像素找到对应的参考像素,映射关系可表示为

$$\hat{X}_r = \delta_d(\hat{X}_d) \mathbf{P}_r^{-1} (\hat{C}_d - \hat{C}_r) + \mathbf{P}_r^{-1} \mathbf{P}_d \hat{X}_d \quad (2)$$

在该过程中,由于 $\delta_d(\hat{X}_d)$ 未知,因此 \hat{X}_r 无法直接获得,而是要依赖于 1 维搜索的过程。

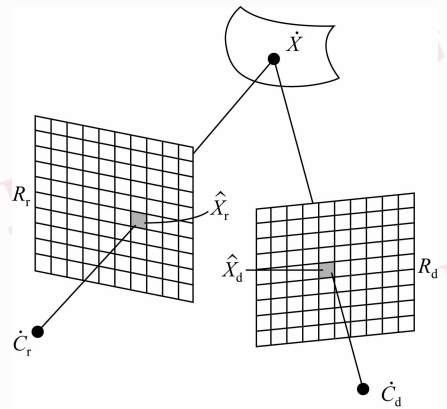


图 1 图像映射原理

Fig. 1 Principle of Image Warping

2.2 极线几何关系

极线几何用以描述映射中空间几何上的约束关系。如图 2,参考视点 \hat{C}_r ,目的视点 \hat{C}_d 和空间点 \hat{X} 确定了一个空间平面,称为极平面(epipolar plane),映射中所有的几何关系都发生在极平面内。极平面和成像面相交会得到一条交线,称为极线(epipolar line),目的像素所对应的参考像素必定位于参考域的极线上。参考和目的视点的连线与成像平面的交

点称为极点 (epipole), 极点位于极线上。极线几何关系是图像映射中的基本约束关系, 其具备以下性质^[20]:

(1) 整体匹配性: 设映射中极线 l_r 和 l_d , 像素 \hat{X}_r^i 和 $\hat{X}_d^i (i=1, 2, \dots, n)$ 相互对应, 若 $\hat{X}_r^i \in l_r$, 则 $\hat{X}_d^i \in l_d$ 。即参考图像中极线上参考像素与目标图像的对应极线上目的像素是整体匹配的。

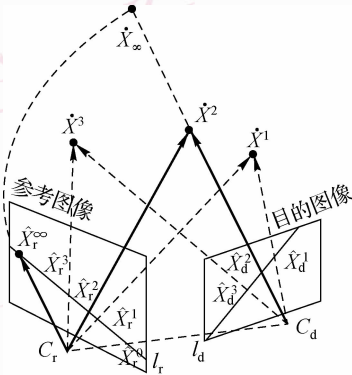


图 2 极线几何的基本性质
Fig. 2 Characters of epipolar geometry

(2) 极线保序性: 空间点 X^i 投影到参考和目的图像平面分别得到像素 \hat{X}_r^i 和 $\hat{X}_d^i (i=1, 2, 3)$, 它们在极线上排列顺序是一致的。需要说明的是, 由于漫游时视点变化的连续性, 使得极线保序性在大部分情况下严格成立, 而对于视差梯度相差很大或包含透明元素的场景不是严格成立。

3 双向缩放 Image Warping

3.1 算法原理

考虑将正向和逆向 Image Warping 的原理相结合。首先利用逆向映射原理获得目的图像的边界信息, 利用极线保序性, 快速确定参考域中的有效像素范围。而为了避开逆向映射的极线搜索, 利用正向映射来完成信息的传递, 其中采用模板方法绘制减少空洞。通过动态地变换映射的方向和顺序, 结合逆向和正向映射来克服单向映射存在的问题, 可以获得不错的效果。算法流程如图 3 所示。

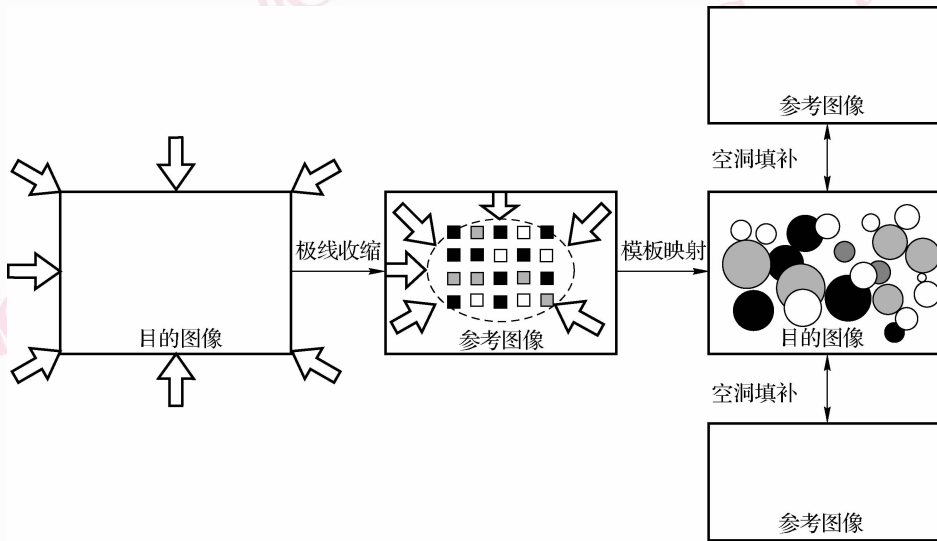


图 3 算法流程
Fig. 3 Work flow

3.2 视景收缩

由于在正向映射中, 并非所有参考域的采样信息都位于目的视点的视域范围内。因此, 考虑如何有效地确定参考域中能够映射到目的视点下的像素区域, 从而直接利用正向映射进行绘制。

为了得到有效像素区域, 首先需要确定区域边缘的像素。参考图像可以看成若干极线束的集合, 因此, 确定边缘可看作确定每条参考极线上有效线

段的问题。根据整体匹配性, 若参考极线 l_r 和目的极线 l_d 属于同一极平面, 则 l_r 上的参考像素所对应的目的像素必然位于 l_d 上, 因此, 可以沿着目的极线从外到内进行收缩, 找到第一个匹配的参考像素, 从而确定参考极线上的有效线段。

这里将参考和目的域中的像素分为两类: 起止像素和非起止像素。由于任意一条穿越图像的极线和边界必有两个交点 b_n 和 b_m (如图 4 所示), 设线段

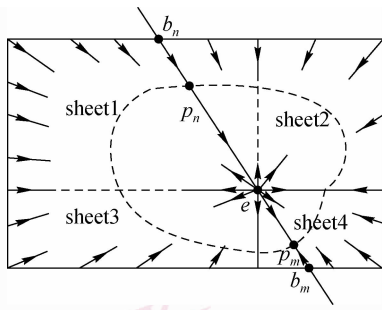


图4 视景收缩过程

Fig.4 View shrinking

$b_n b_m$ 上的非空匹配点集为 $D\{p\}$, 则必存在点 p_n, p_m 满足 $|b_n p_n| = \min |b_n p_i|$ 和 $|b_m p_m| = \min |b_m p_i|$, 称其为对应极线的起止像素, 即从极线和图像边界的两个交点沿极线向内进行逆向映射时找到第一个匹配像素。而起止像素之间的其他像素称为非起止像素, 其中起止像素通过逆向映射建立对应关系, 非起止像素位于起止像素之间, 非起止像素通过正向映射建立对应关系。

3.3 信息量充分性

本文将参考域中那些能在目标域可见, 即能建立有效映射关系的像素, 称之为有效像素。对于符合极线保序性的不透明场景, 可证明经过视景收缩算法后, 有效像素仍位于收缩轮廓内, 即信息量是充分的(见附录)。

3.4 模板映射

由于参考和目的视点的采样密度不同, 参考像素所包含的细节信息程度往往不能满足目的视点下的需要, 这里根据 Footprint^[17] 原理, 采用不同半径的模板对参考像素进行重构。

模板映射将每个参考像素采样的空间点信息看作周围空间场的平均值, 然后通过卷积求出周围的密度分布函数。通过和重构内核非零域的卷积计算, 恢复出相关空间信息, 再投影到目的域中进行融合绘制。

首先需要确定所采用的重构内核函数。根据场景特点, 这里采用双线性函数进行重构。为了简化计算, 不考虑参考像素对应空间点的表面方向。设重构内核的半径为 r , 距离中心的长度为 d , 则核函数为: $K(d, r) = (1 - d/r)$ 。设参考像素 $\hat{X}_r(u_r, v_r)$, 映射后对应目的像素 $\hat{X}_d(u_d, v_d)$, 采用双线性内核对 \hat{X}_d 进行重构, 对于重构像素 $\hat{X}_d^i(u_d^i, v_d^i)$ 有

$$W_u^i = \begin{cases} K(u_d^i - u_d, r) & u_d^i \geq u_d \\ K(u_d - u_d^i, r) & u_d^i < u_d \end{cases}$$

$$W_v^i = \begin{cases} K(v_d^i - v_d, r) & v_d^i \geq v_d \\ K(v_d - v_d^i, r) & v_d^i < v_d \end{cases}$$

其中, W_u^i 和 W_v^i 分别表示 \hat{X}_d^i 在 u 和 v 方向上的系数, 因此 \hat{X}_d^i 最终的颜色和透明度分别为

$$\text{color}(\hat{X}_d^i) = W_u^i W_v^i \cdot \text{color}(\hat{X}_d), \text{alpha}(\hat{X}_d^i) = W_u^i W_v^i$$

在映射中, 还需要确定模板大小。若半径过小, 重构后的目的域仍存在大量空洞; 反之则会大大增加重构的计算量。根据平面几何的相似性关系(如图5所示), 目的和参考像素的几何比例为 $d_1 f_2 / d_2 f_1$, 在实际计算中, 因为参考和目的相机矩阵往往具有相同的内部参数 f , 所以模板半径由视点到空间点的距离比 d_1 / d_2 确定。这里主要采用 $3 \times 3, 5 \times 5$ 和 7×7 的模板进行映射。

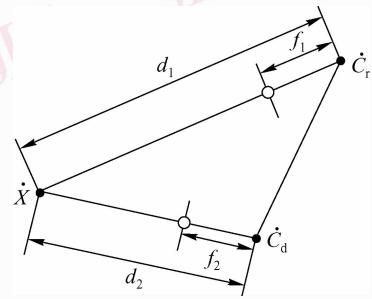


图5 模板映射

Fig.5 Template mapping

3.5 融合绘制

采用不同大小的重构内核将参考像素映射到目的域, 往往会在相邻重构区域的边缘产生相互重合的部分, 因此, 需要对这些部分进行融合绘制。这里采用 RGBA 四元组分别记录 RGB 色彩信息, 和透明度值 A 。融合绘制根据输入像素(称为源像素)和对应位置上已存储的像素(称为目标像素)的透明度因子对色彩信息进行混合。设源像素和目标像素的四元组分别为 (S_R, S_G, S_B, S_A) 和 (D_R, D_G, D_B, D_A) , 则融合绘制后的 RGB 色彩分别为 $R = S_R S_A + D_R (1 - S_A)$, $G = S_G S_A + D_G (1 - S_A)$, $B = S_B S_A + D_B (1 - S_A)$ 。

4 实验

以城堡模型为例, 在一台 PC (P4 2.0G/Geforce4) 上采用 VC6.0 (OpenGL/GLUT1.2) 实现了本文双向算法 (BIW), 同时和传统的正向 (FIW) 和逆向方法 (IIW) 进行比较。在实验过程中选用了

不同的参考和目的视点位置进行多次测试,部分结果如图 6 所示。其中图 6(a)和图 6(b)是在两个不同位置选择的参考图像,若直接进行正向映射,结果图像中出现大量空洞(如图 6(c)和图 6(d)所示),同时在这个过程中存在大量的出界映射。通过视景收缩和模板映射过程,本文算法得到的结果图像如图 6(e)和图 6(f)所示。而针对正向映射得到的带有空洞的结果图像进行逆向重构的方法,得到最终

的结果图像如图 6(g)和图 6(h)所示。为了说明双向缩放映射算法的有效性,对不同方法映射的效率进行了统计(如表 1 所示)。其中传统方法中,分别统计了正向映射(FM)和逆向重构(RC)的时耗,本文方法分别统计了视景收缩阶段(VS)和模板映射(TM)阶段的时耗,同时引入了有效像素率 $E_p\%$ 来表示映射过程中参考域中有效像素所占的比例。

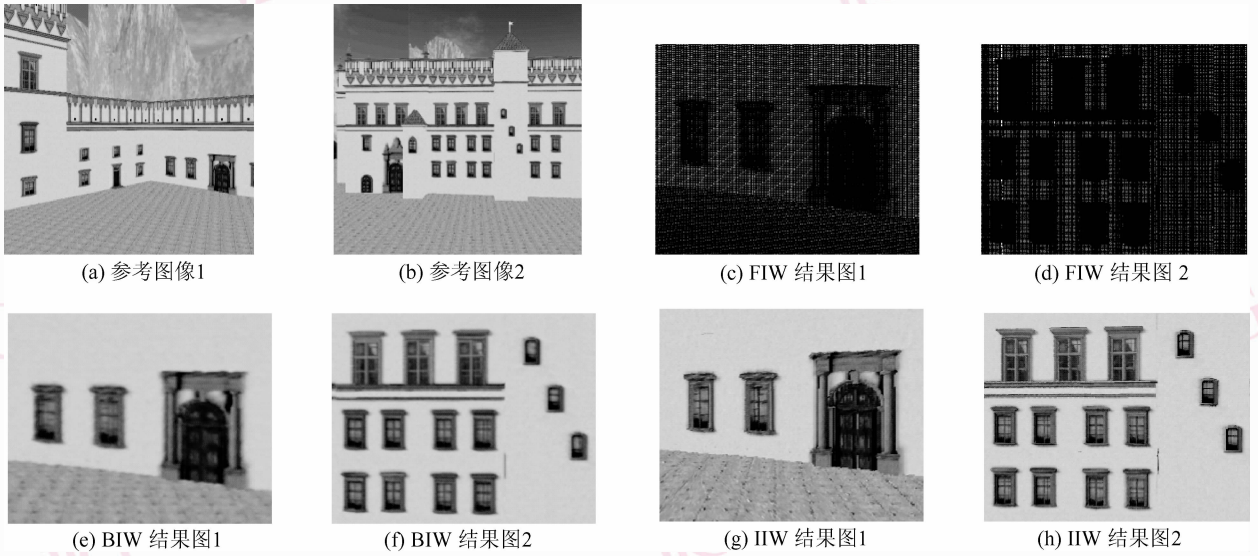


图 6 参考和目的图像

Fig. 6 References and results

表 1 计算效率统计

Tab. 1 Stat of time cost

单位:ms

测试	传统正向算法			双向映射方法				逆向算法
	FM	RC	Total	VS	TM	Total	$E_p\%$	
1	2 513	16 170	18 683	69	912	981	26.10	21 981
2	2 504	15 379	17 883	71	1 071	1 142	30.86	21 762
3	2 521	14 169	16 690	82	1 201	1 283	35.73	22 137
4	2 513	12 267	14 780	74	1 375	1 449	39.91	20 544
5	2 522	12 964	15 486	77	1 419	1 496	41.39	22 201
6	2 512	11 206	13 718	71	1 613	1 684	46.34	20 927
7	2 509	11 197	13 706	84	1 661	1 745	48.01	23 810
8	2 517	11 170	13 687	80	1 726	1 806	50.22	22 683
9	2 520	9 791	12 311	77	1 914	1 991	55.24	21 372
10	2 512	9 755	12 267	82	2 075	2 157	60.55	23 513

5 结 论

针对图像正向 Image Warping 中存在的映射出界和空洞问题,提出一种双向缩放映射算法。该算

法给出了一种合理可行的 Image Warping 流程:首先通过视景收缩快速确定参考域中的有效像素区域,再通过模板映射来填补易出现的大量空洞。该方法可以得到令人比较满意的图像,同时它也提高了计算的效率,实验证明它适用于大部分 Image Warping

过程。

但方法还存在以下不足:首先在于当映射过程中有效像素率较高时,加速的效果会降低;同时如何根据场景的特点选择合适的模板重构内核,进一步提高最终成像的质量,也是需要进一步考虑的问题;而且,缩放 Image Warping 算法的信息量充分性证明是针对符合极线保序性的不透明的一般场景进行的,对于其他特殊的场景还不具备普遍适用性。同时,对于遮挡空洞问题,还有待进一步研究。

致 谢 感谢潘志庚,夏德深教授进行的审阅。

参考文献 (References)

- McMillan L, Bishop G. Plenoptic modeling: an image-based rendering system [A]. In: Proceedings of the SIGGRAPH [C], LA, CA, USA, 1995:39-46.
- McMillan L. An Image-based Approach to Three-dimensional Computer Graphics [D]. Chape Hill, NC, USA, University of North Carolina, 1997.
- Shade J. Layered depth images [A]. In: Proceedings of the SIGGRAPH [C], Orlando, FL, USA, 1998:231-242.
- Rafferty M M, Aliage D G, Lastra A A. 3D image warping in architectural walkroughs [A]. In: Proceedings of the Virtual Reality Annual International Symposium [C], Atlanta, GA, USA, 1998:228-233.
- Fehn C. A 3D-TV system based on video plus depth information [A]. In: Proceedings of Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers [C]. Pacific Grove, CA, USA, 2003:1529-1533.
- Bao P, Gourlay D. Remote walkthrough over mobile networks using 3D image warping and streaming [J]. IEE Proceedings on Vision, Image and Signal Processing, 2004, **151**(4):329-336.
- Mark W R, McMillan L, Bishop G. Post-rendreing 3D warping [A]. In: Proceedings of the 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics [C], New York, NY, USA, 1997:7-16.
- Maxcato R W. Optimizingan Inverse Warper [D]. Boston, MA, USA: MIT, 1999.
- Zheng xin, Wu En-hua. Combining multiple reference images in a backward mapping algorithm for novel view generation [J]. Journal of Software, 2001, **12**(10): 1464-1671. [郑新, 吴恩华. 从多幅参考图像合成目标图像的逆映射算法 [J]. 软件学报, 2001, **12**(10): 1464-1671.]
- Zheng xin, Wu En-hua. A fast inverse warping algorithm for generating novel view [J]. Journal of Software, 2001, **12**(11): 1667-1674. [郑新, 吴恩华. 生成当前视点目标图像的快速逆映射算法 [J]. 软件学报, 2001, **12**(11): 1667-1674.]
- McMillan L. A List-priority Rendering Algorithm for Redisplaying Projected Surfaces [R]. NRL-TR95-005, Chapel Hill, NC, USA: University of North Carolina.
- Oliveira M M, Bishop G. Factoring 3-D Image Warping Equations into a Pre-warp Followed by Conventional Texture Mapping [R]. NRL-TTR99-002, Chapel Hill, NC, USA: University of North Carolina.
- Tang Yang, Wu Hui-zhong, Xiao Fu, et al. Layered image warping based on equal-density mapping and texture-reconstruction [J]. Journal of Image and Graphics, 2006, **11**(4):555-562. [汤杨, 吴慧中, 肖甫等. 基于等密度映射和纹理重构的分层图像变换 [J]. 中国图象图形学报, 2006, **11**(4):555-562.]
- Mark W R, Bishop G. Memory access patterns of occlusion-compatible 3D image warping [A]. In: Proceedings of 1997 Siggraph/Eurographics Workshop on Graphics Hardware [C], LA, CA, USA, 1997:35-44.
- Tang Yang, Wu Hui-zhong Xiao Fu, et al. Efficient inverse image warping based on spatial continuity [J]. Journal of System Simulation, 2006, **18**(3):655-658. [汤杨, 吴慧中, 肖甫等. 基于空间连贯性的快速图像逆映射算法 [J]. 系统仿真学报, 2006, **18**(3):655-658.]
- Tang Yang, Wu Hui-zhong, Xiao Fu, et al. CSA: An accelerated algorithm of inverse image warping [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2005, **17**(9):1963-1968. [汤杨, 吴慧中, 肖甫等. CSA——一种加速的图像逆映射算法 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, **17**(9):1963-1968.]
- Tang Yang, Wu Hui-zhong, Xiao Fu, et al. A novel search-transform algorithm for inverse image warping [J]. Computer Science, 2006, **33**(2):230-233. [汤杨, 吴慧中, 肖甫等. 用于图像逆映射的搜索转移算法 [J]. 计算机科学, 2006, **33**(2):230-233.]
- Westover L. Footprint evaluation for volume rendering [J]. Computer Graphics, 1990, **24**(4):367-376.
- Zhang Y C, Liu X H, Wu E H. Accelerated backward warping [J]. Journal of Computer Science and Technology, 2003, **18**(1):48-55.
- Gao Wen, Chen Xi-lin. Computer Version-algorithm and System Principle [M]. Beijing: Tsinghua University Press. 1999. [高文, 陈熙霖. 计算机视觉: 算法与系统原理 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.]

附录

定义 1(信息量充分性): 在映射 $\mathbf{R}_r \xrightarrow{f} \mathbf{R}_d$ 中, 记 $\hat{X}_r = f(\hat{X}_d, \delta)$, 设参考图像中所有有效像素的集合为 $E = \{\hat{X}_r \mid \hat{X}_r = f(\hat{X}_d, \delta), (\hat{X}_d \in \mathbf{R}_d, \hat{X}_r \in \mathbf{R}_r)\}$, 则对于像素集合 D , 若使得 $E \subseteq D \subseteq \mathbf{R}_r$ 成立, 则称 D 是信息量充分的。

定义 2(可见性): 设射线 \overrightarrow{CX} 和不透明物体表面的交点为 $\dot{X}_i (i=1, 2, \dots)$, 若存在 \dot{X}_k 使得 $|\overrightarrow{CX}_k| = \min |\overrightarrow{CX}_i|$, 则称 \dot{X}_k 对视点 \dot{C} 可见, 记为 $\dot{X}_k \triangleright \dot{C}$ 。

为了证明信息量的充分性, 极平面中的几何关系如图 7(a) 所示, 其中阴影区域表示 3 维物体在极平面内的截面, 参考和目的视点对应的视角为 $\angle R_1^* C_r R_2^*$ 和 $\angle D_1^* C_d D_2^*$ 。 \dot{X}_n, \dot{X}_m 为视景收缩确定

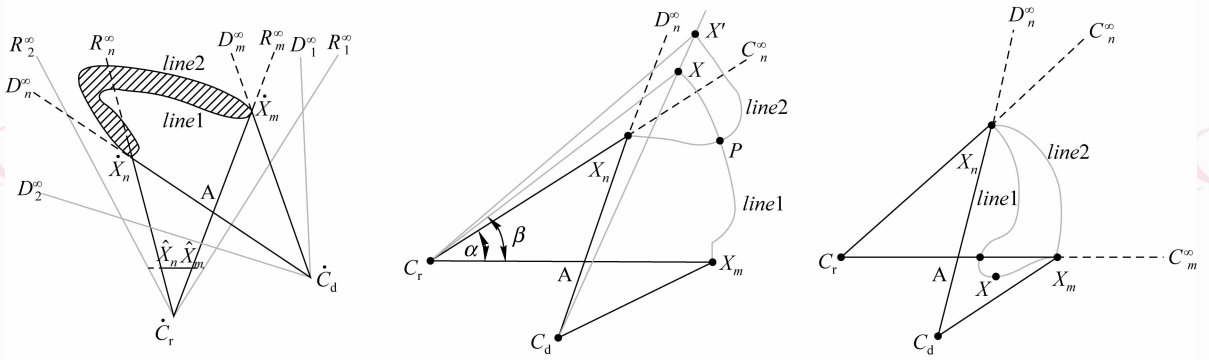


图 7 信息量充分

Fig. 7 Sufficiency of information

的起止像素所对应的物体表面点, \hat{X}_n, \hat{X}_m 为其在参考域中对应起止像素点。 \dot{X}_n, \dot{X}_m 将物体的闭合轮廓分为两段连续曲线 **line1** 和 **line2**, 即对 C_d 而言的物体正面和背面, 由定义 2 和几何关系有如下推论:

推论 1 若 $\dot{X}_i \triangleright \dot{C}_d$, 则 $\dot{X}_i \in \text{line1}$, 即 \dot{C}_d 的可见点都位于其对应的正面。

推论 2 若 $\dot{X}_i \triangleright \dot{C}_d$ ($\dot{X}_i \neq \dot{X}_n, \dot{X}_m$), 则在射线 $\overrightarrow{C_d X_i}$ 和物体轮廓的交点中, 一定 $\exists \dot{X}_j \in \text{line2}$, 即除端点外每个 \dot{C}_d 的可见点必存在对应的背面点。

证明如下:

(1) 由极线几何的特点可知, 收缩轮廓可看成由若干条过极点的极线段确定, 因此只需考虑 2 维情况。参考图像中的起止像素分别为 \hat{X}_n 和 \hat{X}_m , 则参考图像中的极线段为 $\overline{X_n X_m}$, 只需证明 $\overline{X_n X_m}$ 是信息量充分的, 即 $E \subseteq \overline{X_n X_m} \subseteq R_r$ 。

(2) 由视景收缩算法可知, 所有对 \dot{C}_d 可见的空间点必位于 $\text{Area}(D_n^\infty C_d D_m^\infty)$ 中, 即若 $\dot{X} \triangleright \dot{C}_d$ 且 $\dot{X} \triangleright \dot{C}_r$, 则 $\dot{X} \in \text{Area}(D_n^\infty C_d D_m^\infty)$ 。由几何投射的关系可知 $\text{Area}(R_n^\infty \dot{X}_n A \dot{X}_m D_m^\infty)$ 中所有点的对应参考像素 $\in \overline{X_n X_m}$, 则只需证明在 $\text{Area}(D_n^\infty X_n R_n^\infty)$ 和 $\text{Area}(A C_d X_m)$ 中不存在点 \dot{X} , 使得 $\dot{X} \triangleright C_d$ 且 $\dot{X} \triangleright C_r$ 。

(3) 证明不存在 $\dot{X} \in \text{Area}(D_n^\infty X_n R_n^\infty)$, 使得 $\dot{X} \triangleright C_d$ 且 $\dot{X} \triangleright C_r$ 成立(图 7(b))。

反证: 设 $\exists \dot{X} \in \text{Area}(D_n^\infty X_n R_n^\infty)$ 满足上述条件, 由推论 1 知 $\dot{X} \in \text{line1}$, 且由推论 2 $\exists \dot{X}' \in \text{line2}$, 且 $\beta > \alpha > \angle X_m C_r X$ ($\alpha = \angle X_m C_r X, \beta = \angle X_m C_r X'$)。又 $\dot{X} \in \text{line1}$, 所以存在连续曲线 $\text{line}(X X_m) \subseteq \text{line1}$, 使得 $\text{Area}(X_m C_r X)$ 闭合, 同理因为 $\dot{X}' \in \text{line2}$, 所以存在连续曲线 $\text{line}(X' X_n) \subseteq \text{line2}$, 使得 $X' X_n$ 连续。由于 $\dot{X}' \notin \text{Area}(X_m C_r X)$ 而 $\dot{X}_n \in \text{Area}(X_m C_r X)$, 所以 $\text{line}(X' X_n)$ 和 $\text{Area}(X_m C_r X)$ 边界必有交点, 又由于 \dot{X} 和 \dot{X}_m 可见, 则交点 \dot{P} 只能交与 **line1**, 即 $\dot{P} \in \text{line1}$ 且 $\dot{P} \in \text{line2}$, 则 \dot{P} 透明, 与题设不符。

(4) 证明不存在 $\dot{X} \in \text{Area}(A C_d X_m)$, 使得 $\dot{X} \triangleright \dot{C}_d$ 且 $\dot{X} \triangleright \dot{C}_r$ 成立(如图 7(c) 所示)。

反证: 设 $\exists \dot{X} \in \text{Area}(A C_d X_m)$ 满足上述条件, 由推论 1 可知 $\dot{X} \in \text{line1}$, 则存在 $\text{line}(X X_n) \subseteq \text{line1}$, 由几何关系和起止像素的定义可知 $\text{line}(X X_n)$ 与直线 $\overline{C_r C_m^\infty}$ 有交点 \dot{P} , 且 $\dot{P} \in \overline{A X_m}$ 。则 $|\overrightarrow{C_r \dot{P}}| < |\overrightarrow{C_r X_m}|$, 有定义 2 可知 \dot{X}_m 不可见, 与题设不符。

(5) 由(2)、(3)、(4)可知, $E \subseteq \overline{X_n X_m}$, 显然 $\overline{X_n X_m} \subseteq R_r$, 即 $E \subseteq \overline{X_n X_m} \subseteq R_r$, 因此得证, 即对于连续不透明物体, 视景收缩过程是信息量充分的。由于场景可以看作多个连续物体的离散组合, 由极线的整体匹配性和保序性可知, 也是信息量充分的。